Setningslogiske modalsystemer med McKinsey-Tarski egenskapen.

av

Morten Harboe Rognes

1971

(Bearbeidet og renskrevet desember 2008)

© Morten Harboe Rognes

§1 Innledning

La S være et setningslogisk modalsystem av den typen vi har undersøkt tidligere. Da sies S å ha McKinsey-Tarski egenskapen dersom S|-(Lα v Lβ) → S|- Lα v S|- Lβ. Motivet for å knytte navnene til McKinsey og Tarski til systemer med denne egenskap er at det virker som om disse to var de første som viste, ved hjelp av algebraiske argumenter, at blandt annet systemene T og S4 hadde denne egenskap[1].

Hovedhensikten med dette arbeidet er å bruke halvsyntaktiske modeller for å vise at en rekke modalsystemer har denne egenskap. Resultatene som bevises i dette skrift er derfor på ingen måte nye, men bevismetoden er en annen enn i de skrifter hvor vi har funnet denne egenskapen omtalt. Vi minner om at det ved lesningen av dette skrift forutsettes at leseren har satt seg inn i Rognes [1], [2] og [3].

§2 Halvsyntaktiske modeller

Det er hensiktsmessig å definere en del begreper som har med halvsyntaktiske modeller å gjøre før vi går inn på de bevis som utgjør kjernen i dette skrift.

Vi minner om at en *sannhetsmengde* er en formelmengde Δ i L som oppfyller de følgende krav: (i) Er ¬α med i Δ så er α ikke med i Δ. (ii) Er α, β to formler i L har man at α→β er med i Δ hvis og bare hvis β er med i Δ om α er det. (iii) Er p en setningsvariabel er enten p eller ¬p, men ikke begge, med i Δ.

Den følgende definisjon av halvsyntaktisk modell er identisk med den som ble gitt i Rognes [1]:

Definisjon 2.1: Med en halvsyntaktisk modell forstås et ordnet par <Δ,Γ> som oppfyller de følgene krav: (i) Δ, Γ er formelmengder. (ii) Δ er en sannhetsmengde. (iii) Man har:

(1) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΔ ↔ αêΓ))

Vi kaller en halvsyntaktisk modell der man har LαêΔ → αêΔ for en modell som oppfyller sannhetskravet. Man ser at dette kravet, i lys av (1), er ekvivalent med kravet: Γ Inkl Δ.

Definisjon 2.2 Med en halvsyntaktisk modellstruktur forstås et ordnet par <υ,Γ> som oppfyller de følgende krav: (i) υ er en funksjon som til enhver setningsvariabel tilordner enten verdien 1 eller verdien 0 (ii) Γ er en mengde med formler i L

Definisjon 2.3: (a) Anta <υ,Γ> en halvsyntaktisk modellstruktur. Da er *valuasjonsfunksjonen φ av første slag assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>* den minste funksjonen
φ: Fm(L) → {0,1} som oppfyller de følgende krav:

(1) φ(p)=1 ↔ υ(p) =1
(2) φ(¬α)= 1 ↔ φ(α)=0
(3) φ(α→β)=1 ↔. φ(α)=1 → φ(β)=1
(4) φ(Lα) =1 ↔ αêΓ

(b) Med en *halvsyntaktisk modell av første slag* forstås et triple <υ,Γ,φ> der <υ,Γ> er en halvsyntaktisk modellstruktur og φ er valuasjonsfunksjonen av første slag som er assosiert

1 Se McKinsey og Tarski [1] og dessuten Kripke [1], s. 94-95

© Morten Harboe Rognes

med modellstrukturen <υ,Γ>.

I Rognes [1] viste vi at enhver halvsyntaktisk modell er ekvivalent med en halvsyntaktisk modell av første slag og omvendt. Mer presist viste vi at den følgende sats holdt:

Teorem 2.1 (a) Anta M=<Δ,Γ> er en halvsyntaktisk modell. Definer en halvsyntaktisk modell <υ,Γ',φ> av første slag ved å sette: $\upsilon(p) = 1 \leftrightarrow p \hat{e} \Delta$ og $\Gamma' = \Gamma$. Da har vi for alle formler α i L at $\varphi(\alpha)=1 \leftrightarrow \alpha \hat{e} \Delta$

(b) Anta <υ,Γ,φ> er en halvsyntaktisk modell av første slag. Definer Δ ved: $\Delta = Mg(\alpha: \alpha \hat{e} Fm(L) \ \& \ \varphi(\alpha)=1)$ og definer Γ' ved $\Gamma' = Mg(\alpha: \alpha \hat{e} Fm(L) \ \& \ \varphi(L\alpha)=1)$
Da har vi at <Δ,Γ'> er en halvsyntaktisk modell og at

$(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\varphi(\alpha)=1 \leftrightarrow \alpha \hat{e} \Delta))$

Vi utelater beviset for denne sats siden det dreier seg om trivielle induksjonsbevis på lengden av formler.

Det er ikke alltid like lett å vise eksistensen av halvsyntaktiske modeller som oppfyller sannhetskravet, eller halvsyntaktiske modeller av første slag som oppfyller kravet

$(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \ \& \ \alpha \hat{e} \Gamma \rightarrow \varphi(\alpha)=1)$

For å bøte på dette innfører vi nok en art av halvsyntaktiske modeller. Disse kalles *halvsyntaktiske modeller av annet slag*. Definisjonen er som følger:

Definisjon 2.4: (a) Anta <υ,Γ> en halvsyntaktisk modellstruktur. Da er *valuasjonsfunksjonen φ av annet slag assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>* den minste funksjonen $\varphi: Fm(L) \rightarrow \{0,1\}$ som oppfyller de følgende krav:

(1) $\varphi(p)=1 \leftrightarrow \upsilon(p)=1$
(2) $\varphi(\neg\alpha)= 1 \leftrightarrow \varphi(\alpha)=0$
(3) $\varphi(s\alpha\rightarrow\beta)=1 \leftrightarrow. \ \varphi(\alpha)=1 \rightarrow \varphi(\beta)=1$
(4) $\varphi(L\alpha)=1 \leftrightarrow . \ \varphi(\alpha)=1 \ \& \ \alpha \hat{e} \Gamma$

(b) Med en *halvsyntaktisk modell av annet slag* forstås et triple <υ,Γ,φ>, der <υ,Γ> er en halvsyntaktisk modellstruktur, og φ er valuasjonsfunksjonen av annet slag som er assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>.

Man kan vise at enhver halvsyntaktisk modell av første slag som oppfyller sannhetskravet er ekvivalent med en halvsyntaktisk modell av annet slag. Omvendt kan man vise at enhver halvsyntaktisk modell av annet slag er ekvivalent med en slik modell av første slag som oppfyller sannhetskravet. Man ser at for å spesifisere en halvsyntaktisk modell av annet slag er det nok å spesifisere verditilordningen υ og formelmengden Γ. Valuasjonsreglene for formlene i L er da slik at de automatisk gjør enhver formel av typen $L\alpha\rightarrow\alpha$ sann. Dette er imidlertid ikke så enkelt når det gjelder halvsyntaktiske modeller av første slag som oppfyller sannhetskravet. Problemet viser seg straks man stiller mer kompliserte krav til mengden Γ.

Teorem 2.2 (a) Anta <υ,Γ,φ> er en halvsyntaktisk modell av første slag som oppfyller sannhetskravet. La φ' være valuasjonsfunksjonen av annet slag assosiert med modellstrukturen
<υ,Γ>. Da har vi: $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \varphi'(\alpha) = \varphi(\alpha))$

(b) Anta <υ,Γ,φ> er en halvsyntaktisk modell av annet slag. Definer Γ' ved å sette $\Gamma' = Mg(\alpha: \alpha \hat{e} Fm(L) \ \& \ \varphi(L\alpha)=1)$. La φ' være valuasjonsfunksjonen av første slag assosiert

© Morten Harboe Rognes

med <υ,Γ'>. Da har vi at <υ,Γ',φ'> er en halvsyntaktisk modell av første slag som oppfyller sannhetskravet. Dessuten har vi:

$(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \varphi'(\alpha) = \varphi(\alpha))$

§3 Systemsekvensen <T;n>/nêN/ og systemene T og S4.

I det følgende skal vi betrakte en sekvens av systemer, T;0, T;1, ... osv. ,der hvert system i sekvensen er svakere enn systemet T. Sekvensen er induktivt definert på den følgende måte: Vi definerer systemet T;0 som systemet hvis aksiomer er alle formler i mengden PC*, dessuten alle formler av typen Lα, der αêPC*, samt alle instanser av skjemaene:

$L\alpha \rightarrow \alpha$

$L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$

Den eneste slutningsregelen i systemet er modus ponens.

Gitt at systemet T;n er systemet T;(n+1) definert som det systemet hvis aksiomer er formlene i mengden PC*, alle formler av typen Lα, der T;n|-α , samt alle instanser av skjemaene:

$L\alpha \rightarrow \alpha$

$L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$

Den eneste slutningsregelen i systemet er modus ponens. Dermed er hvert system i sekvensen <T;n>/nêN/ definert.

Når det gjelder systemet T, som er distinkt fra hvert system i den rekken vi har definert, er dette definert på vanlig måte: Aksiomer i T er alle formlene i PC* samt alle formler av typen $L\alpha \rightarrow \alpha$ og $L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow L\alpha \rightarrow L\beta$. Slutningsreglene i systemet er modus ponens og nødvendighetsregelen: $\vdash\alpha \rightarrow \vdash L\alpha$. Når det gjelder S4 er dette som systemet T bortsett fra at man legger til aksiomskjemaet $L\alpha \rightarrow LL\alpha$. Slutningsregler i S4 er modus ponens og nødvendighetsregelen.

Når det gjelder systemet T og de diverse T;n (n>=0) kan man lett vise at følgende holder:

Teorem 3.1 $T = UN/n\hat{e}N/(T;n)$

Bevis: (a) Vi beviser først inklusjonen mot venstre. Vi viser at T;n Inkl T for alle nêN. Dette skjer ved induksjon på n. *Basistrinn:* n=0. Vi må da vise at alle teoremer i T;0 er inkludert i T. Det er åpenbart at alle aksiomene i T;0 er blandt aksiomene i T. De vil derfor være teoremer i T. Videre er det klart at T er lukket under modus ponens. Det følger at T;0 Inkl T. *Induksjonstrinn:* Anta T;n Inkl T. Vi skal vise at T;(n+1) Inkl T. Det er klart at PC* Inkl T og at alle formlene av typen $L\alpha \rightarrow \alpha$ og $L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow L\alpha \rightarrow L\beta$ er med i T. For å vise at alle aksiomene i T;(n+1) er med i T er det derfor tilstrekkelig å vise at $L\alpha \hat{e} T$ om T;n $\vdash\alpha$. Men ifølge induksjonshypotesen er T;n Inkl T. Er derfor $\alpha \hat{e} T;n$ har vi $\alpha \hat{e} T$. Og siden vi har $T\vdash\alpha \rightarrow T\vdash L\alpha$ følger det at $L\alpha \hat{e} T$. Dette viser at alle aksiomene i T;(n+1) er med i T. Siden T er lukket under modus ponens følger det at T;(n+1) Inkl T. Dette viser at induksjonstrinnet holder. Vi har dermed vist at T;n Inkl T for alle nêN. Herav følger UN/nêN/(T;n) Inkl T

(b) Vi viser så at inklusjonen mot høyre hoder. Det er klart at alle aksiomene i T er inkludert i T;0. Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at UN/nêN/ (T;n) er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen. Vi viser først at (1) T;n Inkl T;(n+1) for alle nêN. Det er åpenbart at PC* og at alle formlene av typen $L\alpha \rightarrow \alpha$ og $L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow L\alpha \rightarrow L\beta$ er med i

© Morten Harboe Rognes

T;(n+1). Anta αêT;n. Da har vi at LαêT;(n+1). Men Lα→α er med i T;(n+1). Det følger da siden T;(n+1) er lukket under modus ponens at αêT;(n+1). Dette viser at (1) holder. Anta nå (2) αêUN/nêN/(T;n) & (α→β)ê UN/nêN/(T;n). Da har vi ved hjelp av (1) at det må finnes m slik at αêT;m & (α→β)êT;m. Men siden T;m er lukket under modus ponens følger βêT;m.

Anta αêUN/nêN/(T;n). Da har vi αêT;n for noe n. Det følger da at Lα er et aksiom i T;(n+1) og derfor at LαêT;(n+1) Inkl UN/nêN/(T;n). Dette viser at UN/nêN/(T;n) er lukket under nødvendighetsregelen. På grunnlag av det vi nå har vist følger T Inkl UN/nêN/(T;n). **QED**.

Vi vender oss nå til den semantiske teorien vi skal bruke i forbindelse med systemene ovenfor.

Definisjon 3.1 (a) Med *en halvsyntaktisk T-modell av første slag* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

(i) (Aα)(αêFm(L) &αêΓ → φ(α)=1)
(ii) αêΓ & (α→β)êΓ → βêΓ
(iii) T|-α → αêΓ

(b) Med en *halvsyntaktisk T;n-modell av første slag (n>0)* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

(i) (Aα)(αêFm(L) &αêΓ → φ(α)=1)
(ii) αêΓ & (α→β)êΓ → βêΓ
(iii) T;(n-1)|-α → αêΓ

(c) Med *en halvsyntaktisk T;0-modell av første slag* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

(i) (Aα)(αêFm(L) &αêΓ → φ(α)=1)
(ii) αêΓ & (α→β)êΓ → βêΓ
(iii) PC* Inkl Γ

(d) Med *en halvsyntaktisk S4-modell av første slag* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

(i) (Aα)(αêFm(L) &αêΓ → φ(α)=1)
(ii) αêΓ & (α→β)êΓ → βêΓ
(iii) S4|-α → αêΓ
(iv) αêΓ → LαêΓ

Man ser at dersom S er et av systemene T;n, T eller S4 vil en halvsyntaktisk S-modell av første slag oppfylle sannhetskravet. Det første underpunktet under (a) - (c) er nettopp dette krav. En helt tilsvarende definisjon kan gis i forbindelse med modeller av annet slag:

Definisjon 3.2 (a) Med *en halvsyntaktisk T-modell av annet slag* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av andre slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

(i) αêΓ & (α→β)êΓ → βêΓ
(ii) T|-α → αêΓ

(b) Med en *halvsyntaktisk T;n-modell av annet slag (n>0)* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av andre slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

(i) αêΓ & (α→β)êΓ → βêΓ
(ii) T;(n-1)|-α → αêΓ

(c) Med *en halvsyntaktisk T;0-modell av annet slag* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av andre slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

© Morten Harboe Rognes

(i) $\alpha \hat{e} \Gamma \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Gamma \rightarrow \beta \hat{e} \Gamma$
(ii) PC* Inkl Γ

(d) Med *en halvsyntaktisk S4-modell av annet slag* forstår vi en halvsyntaktisk modell $<\upsilon,\Gamma,\varphi>$ av andre slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

(i) $\alpha \hat{e} \Gamma \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Gamma \rightarrow \beta \hat{e} \Gamma$
(ii) $S4|\text{-}\alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma$
(iii) $\alpha \hat{e} \Gamma \rightarrow L\alpha \hat{e} \Gamma$

Sammenligner man disse to definisjonene ser man at vi, når det gjelder, modellene av annet slag har sløyfet sannhetskravet. Dette er unødvendig i forbindelse med modeller av annet slag. Vi skal benytte den følgende notasjon i det følgende. Er $a=<x;1,...,x;n>$ et n-tuple skal $\pi;j(a)$ betegne den j'te komponenten i tuplet a. Er for eksempel $M=<\upsilon,\Gamma,\varphi>$ en halvsyntaktisk T-modell av annet slag vil derfor $\pi;1(M)$ være funksjonen υ, $\pi;2(M)$ komponenten Γ og $\pi;3(M)$ valuasjonsfunksjonen M. Er S et av systemene som vi så langt har omtalt eller et av de systemene som vi vil komme til å drøfte betegner vi mengden av alle halvsyntaktiske S-modeller av første slag med $|S|$. Mengden av alle halvsyntaktiske S-modeller av annet slag betegner vi med $||S||$. Dette innebærer at for eksempel at $||T;(n+1)||$ er mengden av alle halvsyntaktiske $T;(n+1)$-modeller av annet slag. $|T|$ betegner mengden av alle halvsyntaktiske modeller av første slag.

Teorem 3.2: Anta S er systemet T, S4 eller et av systemene i rekken $<T;n>/n\hat{e}N/$. Da har vi:

(a) $S|\text{-}\ \alpha \rightarrow \ (AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(b) $S|\text{-}\ \alpha \rightarrow \ (AM)(M\hat{e}||S|| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(c) $(AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1) \leftrightarrow (AM)(M\hat{e}||S|| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(d) Er Δ en S-konsistent formelmengde finnes det en $M\hat{e}|S|$ slik at $(A\alpha)(\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \ \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(e) $(AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1) \rightarrow S|\text{-}\alpha$
(f) $(AM)(M\hat{e}||S|| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1) \rightarrow S|\text{-}\alpha$

Bevisene for de fleste punktene i denne satsen er egentlig temmelig enkle. For tydelighetens skyld gir vi likevel et detaljert bevis selvom det blir temmelig langt.

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) $S|\text{-}\ \alpha$. Vi skal vise at $\varphi(\alpha)=1$ for enhver S-modell $M=<\upsilon,\Gamma,\varphi>$ av første slag. Det kan være hensiktsmessig å skille mellom forskjellige tilfelle:

Tilfelle (i): S er enten T eller S4. Anta $M=<\upsilon,\Gamma,\varphi>$ er en S-modell av første slag. Da har vi fra Definisjon 3.1a ,dersom S=T, at $(A\alpha)(T|\text{-}\alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma)$. Dessuten har man $(A\alpha)(\alpha \hat{e} \Gamma \rightarrow \varphi(\alpha)=1)$. Fra disse to forhold og (1) følger $\varphi(\alpha)=1$. Tilsvarene ser man fra de tilsvarende krav i Definisjon 3.1d at $\varphi(\alpha)=1$ om S=S4. Satsen holder derfor i dette tilfelle.

Tilfelle (ii): S= T;0 eller et av systemene T;n for n>0. Anta da at $M=<\upsilon,\Gamma,\varphi>$ er en vilkårlig S-modell av første slag. Da har vi at $L\alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma$, og derfor, siden M oppfyller sannhetskravet at $\varphi(L\alpha \rightarrow \alpha)=1$. Videre har vi, siden Γ er lukket under modus ponens, og vi har $\varphi(L\alpha)=1 \leftrightarrow \alpha \hat{e} \Gamma$, at $\varphi(L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow L\alpha \rightarrow L\beta)=1$. Er nå S=T;0 har vi PC* Inkl Γ og derfor at $\varphi(L\alpha)=1$ om $\alpha \hat{e} PC^*$. Dette viser at dersom S=T;0 har vi at alle aksiomene i T;0 holder i modellen M. Har vi at S=T;n (n>0) har vi at $(A\alpha)(T;(n-1)|\text{-}\alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma)$. Dette innebærer at at $\varphi(L\alpha)=1$ om $T;(n-1)|\text{-}\alpha$. Sammen med det andre vi nå har vist viser dette at alle aksiomene i T;n holder i M. Siden M var vilkårlig følger det at alle aksiomene i S holder i enhver S-modell av første slag. Siden β åpenbart holder i alle S-modeller av første slag om α og $\alpha \rightarrow \beta$

© Morten Harboe Rognes

gjør det, følger det at ethvert S-teorem holder i alle S-modeller av første slag.

Vi har dermed vist at punkt (a) i teoremet holder.

Ad (b): *Tilfelle (i)*: S er systemet T. Vi må da vise at alle aksiomene i T holder i enhver halvsyntaktsk T-modell av annet slag. Dessuten må det bevises at modus ponens og nødvendighetsregelen bevarer gyldighet med hensyn på modellene i ||T||. Anta M=<υ,Γ,φ> er en vilkårlig T-modell av annet slag. Det er da lett å se at φ(α)= 1 dersom α er en setningslogisk gyldig formel. Videre har man at φ(Lα)=1 så er φ(α)=1. Det følger at φ(Lα→α)=1. Dessuten er det lett å se at φ(L(α→β)→(Lα→Lβ)) =1 siden Γ er lukket under modus ponens og man har at dersom φ(α→β)=1 & φ(α)= 1 → φ(β)=1. Dette viser at alle aksiomene i T holder i enhver modell i ||T||. Det er lett å se at modus ponens bevarer gyldighet med hensyn på modellene i
||T||. La oss se på nødvendighetsregelen: Anta α holder i alle modellene i ||T||. La M=<υ,Γ,φ> være en vilkårlig modell i ||T||. Anta α er et teorem i T. Da har vi siden α holder i alle modeller i T at φ(α)=1. Videre må vi ha i lys av Definisjon 3.2a at αêΓ. Det følger at φ(Lα)=1. Siden M var en vilkårlig modell i ||T|| følger det at nødvendighetsregelen bevarer gyldighet.

Tilfelle (ii): S er systemet S4. Beviset blir nøyaktig som i forrige tilfelle. Det eneste som trengs er derfor å vise at Lα→LLα holder i alle modeller i ||S4||. Anta M=<υ,Γ,φ> er en vilkårlig modell i ||S4||. Anta φ(Lα)=1. Da har vi αêΓ og derfor i lys av Definisjon 3.2d at LαêΓ. Det følger at φ(Lα)=1& LαêΓ. Herav kan man så slutte: φ(LLα)=1. Det følger at φ(Lα→LLα)=1. Siden M var en vilkårlig modell i ||S4|| har vi at Lα→LLα er gyldig i alle modellene i denne klassen.

Tilfelle (iii): S er systemet T;0. På samme måte som ved T innser man at alle de setningslogisk gyldige formlene og alle formler av typen Lα→α og L(α→β)→Lα→Lβ holder i alle modeller i ||T;0||. Er M=<υ,Γ,φ> en vilkårlig modell i ||T;0|| har man at PC* Inkl Γ. Siden PC* også er inkludert i Mg(α: φ(α)=1) følger det at φ(Lα)=1 om αêPC*. Det følger at Lα holder i alle modeller i ||T;0|| om αêPC*. Det er lett å se at modus ponens bevarer gyldighet med hensyn på modellene i ||T||.

Tilfelle (iv): Vi må vise at påstanden holder om S er et av systemene T;n, der n>0. Dette gjøres ved induksjon på n. På samme måte som ved T;0 innser man at alle de setningslogisk gyldige formlene og alle formler av typen Lα→α og L(α→β)→Lα→Lβ holder i alle modeller i ||T;n||. Anta nå at M=<υ,Γ,φ> er en vilkårlig modell i ||T;n||. Da har man (Aα)(T;(n-1)|- α → αêΓ) På basis av definisjonen av halvsyntaktisk T;n-modell av annet slag, ser man at ||T;n|| Inkl ||T;(n-1)||. Siden vi etter induksjonshypotesen har at alle T;(n-1)-teoremene holder i alle modeller i ||T;(n-1)|| holder de også i alle modeller i ||T;n||. Det følger at dersom α er et teorem i T;(n-1) har vi at φ(α)=1 og at αêΓ. Men da φ(Lα)=1. Dette viser at alle formler av typen Lα holder i enhver modell i ||T;n|| om α er et teorem i T;(n-1). Dermed har vi vis at alle aksiomene i T;n holder i enhver modell i ||T;n||. Det er imidlertid åpenbart at modus ponens bevarer gyldighet. Dette innebærer at absolutt alle teoremene i T;n holder i enhver modell i ||T;n||. Dermed har vi levert et fullstendig bevis for punkt (b).

Ad (c): Vi viser først at (AM)(Mê||S|| → π;3(M)(α)=1) impliserer (AM)(Mê|S| → π;3(M)(α)=1). Anta (1) (AM)(Mê||S|| → π;3(M)(α)=1) og anta at M=<υ,Γ,φ> er en vilkårlig halvsyntaktisk S- modell av første slag. La nå φ' være den valuasjonsfunksjonen av annet slag som er assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>. Man ser da ved hjelp av Definisjon 3.1 og definisjon 3.2 at M'= <υ,Γ,φ'> er en halvsyntaktisk S-modell av annet slag. Fra dette og (1) følger φ'(α)=1. Ved hjelp av Teorem 2.2a følger imidlertid

© Morten Harboe Rognes

φ'(α)=φ(α). Vi har derfor φ(α)=1. Det følger, siden M var vilkårlig at (AM)(Mê|S| → π;3(M)(α)=1).

La oss så vise at (AM)(Mê|S| → π;3(M)(α)=1) impliserer (AM)(Mê||S|| → π;3(M)(α)=1). Anta derfor (2) at (AM)(Mê|S| → π;3(M)(α)=1) og anta at M=<υ,Γ,φ> er en halvsyntaktisk S-modell av annet slag. Som i Teorem 2.2b kan man definere Γ' ved (3) Γ' = Mg(α: αêΓ & φ(α)=1). Man definerer så M' ved (4) M'=<υ,Γ',φ'> der φ' er valusjonsfunksjonen av første slag assosiert med modellstrukturen <υ,Γ'>. Ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av formler finner man da at (5) (Aβ)(βêFm(L) →φ(β)=φ'(β)) Man ser nå lett at M' oppfyller sannhetskravet. For er βêΓ', for vilkårlig β, har vi ved hjelp av (3) og (5) at φ'(β)=1. Det gjenstår å vise at M' oppfyller de andre kravene til en halvsyntaktisk S-modell av første slag. Man ser umiddelbart at Γ' er lukket under modus ponens uansett hvilket system S er. For anta α,α→βêΓ'. Da har vi α,α→βêΓ og derfor siden M er en S-modell av annet slag at βêΓ. Vi har også φ(α)=1 & φ(α→β)=1. Herav følger φ(β)=1. Derfor har vi
βêΓ & φ(β)=1. Fra dette følger at βêΓ'. Alt ettersom hvilket system S er må vi vise at M' oppfyller de spesifikke krav som stilles.

Tilfelle (i): Anta S er T. Vi har ikraft av det som ble vist under punkt (b) at alle teoremer i T holder i enhver T-modell av annet slag. Det følger dersom αêT har vi φ(α)=1. Videre har vi αêΓ. Det følger at αêΓ'. Vi har derfor om S=T at M' oppfyller alle de krav som stilles til en halvsyntaktisk T-modell av første slag.

Tilfelle (ii): S er S4. Vi må da for det første vise at S4 Inkl Γ'. Men siden M er en S4-modell av annet slag har vi at alle S4-teoremene både er inkludert i Γ og holder i M. Dette innebærer at om αêS4 har vi φ(α)=1 & αêΓ. Det følger at αêΓ'. Dessuten må vi vise at (Aα)(αêΓ' → LαêΓ'). Anta αêΓ' . Da følger αêΓ & φ(α)=1. Herav har vi φ(Lα)=1. Men aksiomet Lα→LLα holder i alle halvsyntaktiske modeller av annet slag. Dette innebærer at φ(Lα→LLα)=1 og derfor at φ(Lα)=1 → φ(LLα)=1. Det følger at φ(LLα)=1 og derfor at φ(Lα)=1 & LαêΓ. Fra dette og definisjonen av Γ' følger LαêΓ'. Vi har dermed vist at M' er en S-modell av første slag når S=S4.

Tilfelle (iii) S= T;0. Det eneste som det er nødvendig å vise i dette tilfellet er at PC* Inkl Γ'. Anta αêPC*. da har vi åpenbart at α holder i M og derfor at φ(α)=1. Siden M i dette tilfelle er en T;0-modell av annet slag har vi også at αêΓ. Det følger at αêΓ'. Fra dette følger at M' er en T;0-modell av første slag om S=T;0.

Tilfelle (iv): S er systemet T;n der n>0. I dette tilfellet vil det være tilstrekkelig å bevise. T;(n-1)|-α → αêΓ'. Vi må altså vise at T;(n-1)|-α → αêΓ & φ(α)=1. Siden M er en T;n-modell av annet slag i dette tilfelle følger det umiddelbart fra Definisjon 3.2 at T;(n-1)|-α → αêΓ. Men alle T;(n-1)-teoremer er teoremer i T;n og holder derfor i enhver T;n-modell av annet slag. Da må de også holde i M. Vi har derfor T;(n-1)|-α → φ(α)=1.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (c).

Ad (d): Anta Δ er en S-konsistent mengde. Da kan Δ utvides til en maksimalt S-konsistent mengde Δ' ved hjelp av Lindenbaums sats.[2] Definer en verditilordning υ for setningsvariablene i L ved å sette: (1) υ(p) =1 ↔ pêΔ'. Definer videre Γ ved å sette:

(2) Γ= Mg(α: αêFm(L) & LαêΔ')

Man ser da at <υ,Γ> er en halvsyntaktisk modellstruktur. La φ være den valuasjonsfunksjonen av første slag som er assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>. Da vil M=<υ,Γ,φ> være en halvsyntaktisk modell av første slag. Det er lett ved hjelp av Teorem 4.2 i §4 i Rognes[1] å verifisere at M er en halvsyntaktisk S-modell av første slag. Ved et meget enkelt

2 Se Rognes [1], §4

© Morten Harboe Rognes

induksjonsbevis verifiserer man at $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow . \varphi(\alpha)=1 \leftrightarrow \alpha \hat{e} \Delta')$ Siden Δ Inkl Δ' har vi derfor at det finnes en $M=<\upsilon,\Gamma,\varphi> \hat{e} |S|$ slik at $(A\alpha)(\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \varphi(\alpha)=1)$. Dette viser at punkt (d) holder.

Ad (e): Anta $\neg(S \mid\!- \alpha)$. Da er vil $\{\neg\alpha\}$ være en S-konsistent mengde. Det vil da ifølge punkt (d) finnes en $M \hat{e} |S|$ slik at $(A\beta)(\beta \hat{e} \{\neg\alpha\} \rightarrow \pi;3(M)(\beta)=1)$. Vi har altså at $(EM)(M \hat{e} |S| \ \& \ \neg(\pi;3(M)(\alpha) = 1))$. Herav $\neg(AM)(M \hat{e} |S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$ som er det vi ønsker.

Ad (f): Dette punktet følger umidellbart fra punkt (e) og punkt (c). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 3.3 (Hovedresultat I) Anta S er systemet T, S4 eller et av systemene i rekken $<T;n>/n \hat{e} N/$. Da gjelder:

$S \mid\!- L\alpha \vee L\beta \rightarrow S \mid\!- L\alpha \vee S \mid\!- L\beta$

Bevis: Vi skal vise at negasjonen av konsekventen i satsen impliserer negasjonen av antesedenten. Anta der for (1) $\neg(S \mid\!- L\alpha) \ \& \ \neg S \mid\!- L\beta)$. Fra dette og punkt (e) i Teorem 3.2 følger at det finnes halvsyntaktiske S-modeller M, M' av første slag der vi har:

(2) $M= <\upsilon,\Gamma,\varphi> \ \& \ M'=<\upsilon',\Gamma',\varphi'>$ og (3) $\varphi(L\alpha) =0 \ \& \ \varphi'(L\beta)=0$. Siden M,M' er halvsyntaktiske S-modeller av første slag følger det fra (2) og (3) at (4) $\neg(\alpha \hat{e} \Gamma) \ \& \ \neg(\beta \hat{e} \Gamma')$. Sett nå per definisjon: (5) $\Gamma'' = \Gamma \Omega \Gamma'$. Definer en verditilordning υ'' som tilordner setningsvariablene i L verdier i {0,1} vilkårlig. Da har vi at $<\upsilon'',\Gamma''>$ være en halvsyntaktisk modellstruktur. La φ'' være valuasjonsfunksjonen av annet slag assosiert med denne halvsyntaktiske modellstrukturen $<\upsilon'', \Gamma''>$. Sett (6) $M'' = <\upsilon'',\Gamma'',\varphi''>$. Da er M'' en halvsyntaktisk modell av annet slag. Vi må vise at denne modellen M'' er en S-modell. Det vil være tilstrekkelig å vise at Γ'' oppfyller de kravene som stilles i definisjonen av en S-modell av annet slag. Det er på dette punkt hensiktsmessig å sondre mellom forskjellige tilfelle alt ettersom S er systemet T eller et av systemene i rekken $<T;n>/n \hat{e} N/$.

Tilfelle (i): S er systemet T. For å vise at M'' er en halvsyntaktisk S-modell av annet slag må vi i dette tilfelle vise at Γ'' oppfyller følgende krav:

(7) $\alpha \hat{e} \Gamma'' \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Gamma'' \rightarrow \beta \hat{e} \Gamma''$

(8) $T \mid\!- \alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma''$.

La oss først gi bevis for (8): Anta (9) $T \mid\!- \alpha$. Siden M og M' i dette tilfellet er halvsyntaktiske T-modeller av første slag følger det fra Definisjon 3.1 at alle T-teoremene er inkludert i Γ såvel som Γ'. Vi har derfor at $\alpha \hat{e} \Gamma \Omega \Gamma'$ og derfor i lys av (5) at $\alpha \hat{e} \Gamma''$. Dette viser at (8) holder.

Dernest gir vi et bevis for (7): Anta (10) $\alpha \hat{e} \Gamma'' \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Gamma''$. Ved hjelp av (5) følger herav: (11) $\alpha \hat{e} \Gamma \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Gamma$ og (12) $\alpha \hat{e} \Gamma' \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Gamma'$. Siden M og M' i dette tilfellet er halvsyntaktiske T- modeller av første slag, har vi fra (11),(12) og Definisjon 3.1 at $\beta \hat{e} \ \Gamma \Omega \Gamma' = \Gamma''$. Dette viser at (7) holder.

Fra (4) og (5) følger: (13) $\neg(\alpha, \beta \hat{e} \Gamma'')$. Fra dette og definisjonen av M'' følger at $\varphi''(\neg L\alpha)=1 \ \& \ \varphi''(\neg L\beta)=1$. Herav har vi så at $\varphi''(L\alpha \vee L\beta)=0$. Men herav kan man ved hjelp av Teorem 3.2c slutte at $\neg(T \mid\!- L\alpha \vee L\beta)$, med andre ord:

$\neg(S \mid\!- L\alpha \vee L\beta)$. Dette viser at satsen holder i dette tilfelle.

Tilfelle (ii): S er et av systemene i rekken T;n. I dette tilfelle blir beviset helt analogt med det som ble gjennomført i foregående tilfelle. I stedet for (8) må man nå vise at $T;(n-1) \mid\!- \alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma''$ om $n>0$ og PC* Inkl Γ'' om $n=0$. Men dette er ganske opplagt i lys av Definisjon 3.1bc.

Tilfelle (iii): S er systemet S4. I dette tilfelle må vi vise at Γ'' oppfyller de krav som

© Morten Harboe Rognes

stilles i Definisjon3.2d. Vi må altså vise at Γ" er lukket under modus ponens og inneholder alle S4-teoremene. Dette vises på samme måte som under Tilfelle (i). Dessuten må vi vise at (Aα)(αêΓ" → LαêΓ"). Anta αêΓ" for vilkårlig α. Da har vi αêΓ og αêΓ'. Siden M og M' i dette tilfellet er halvsyntaktiske S4-modeller av første slag følger det at LαêΓ og LαêΓ'. Herav har vi så at LαêΓ". Dette avslutter beviset. **QED**.

§4 Systemene K, K4, KD og KD4 og systemsekvensene <K;n>/nêN/ og <KD;n>/nêN/

I dette avsnittet skal vi vise at ytterligere noen systemer har McKinsey-Tarski egenskapen. I dette tilfelle dreier det seg om systemer som ikke inneholder aksiomskjemaet Lα→α. Dette forenkler betraktningene en god del siden vi ikke behøver å ta i betraktning halvsyntaktiske modeller av annet slag. Man greier seg med halvsyntaktiske modeller av det første slag.

Det er hensiktsmessig å definere presist de systemene vi skal ta i betraktning. K (K4) er det systemet som er nøyaktig som T (S4) bortsett fra at vi utelater aksiomskjemaet Lα→α. KD (KD4) er det systemet vi får fra K (K4) ved å legge til aksiomskjemaet Lα→¬L¬α. Systemsekvensen <K;n>/nêN/ er definert på følgende måte: K;0 er systemet T;0 minus aksiomskjemaet Lα→α. K;(n+1) er definert som den minste formelmengden i L som inneholder PC*, alle instanser av skjemaet L(α→β)→(Lα→Lβ), samt alle formler av typen Lα der α er et teorem i K;n. Systemsekvensen <KD;n>/nêN/ er definert på tilsvarende måte: KD;0 er systemet T;0, men aksiomskjemaet Lα→α er nå erstattet med aksiomskjemaet Lα→¬L¬α. KD;(n+1) er definert som den minste formelmengden i L som inneholder PC*, alle instanser av skjemaene L(α→β)→(Lα→Lβ) og Lα→¬L¬α, samt alle formler av typen Lα der α er et teorem i KD;n.

Til hvert av de systemene som har blitt definert avgrenser vi en korresponderende mengde med halsyntaktiske modeller av første slag. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.1 Med *en halvsyntaktisk K (K4, KD, KD4)-modell av første slag* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

(i) αêΓ & (α→β)êΓ → βêΓ
(ii) K|-α → αêΓ

I det tilfellet at systemet er K4 erstattes (ii) med K4|- α → αêΓ og man legger til kravet

(iii) αêΓ → LαêΓ

I det tilfellet at systemet er KD erstattes (ii) med KD |- α → αêΓ og man legger til kravet:

(iv) αêΓ → ¬((¬α)êΓ)

I tilfellet at systemet er KD4 erstattes (ii) med KD4 |- α → αêΓ og krever i tillegg at Γ oppfyller kravene (iii) og (iv)

Det er nødvendig å definere modellklasser som svarer til systemene i de to sekvensene vi har betraktet. Dette gjøres ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.2 (a) Med en *halvsyntaktisk K;n-modell av første slag (n>0)* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

(i) αêΓ & (α→β)êΓ → βêΓ
(ii) K;(n-1)|-α → αêΓ

(b) Med *en halvsyntaktisk K;0-modell av første slag* forstår vi en halvsyntaktisk modell <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:

© Morten Harboe Rognes

(i) $\alpha \hat{e} \Gamma \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Gamma \rightarrow \ \beta \hat{e} \Gamma$
(ii) PC* Inkl Γ

(c) Med en *halvsyntaktisk KD;n-modell av første slag (n>0)* forstår vi en halvsyntaktisk modell $<\upsilon,\Gamma,\varphi>$ av første slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:
(i) $\alpha \hat{e} \Gamma \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Gamma \rightarrow \ \beta \hat{e} \Gamma$
(ii) $KD;(n-1)|-\alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma$
(iii) $\alpha \hat{e} \Gamma \rightarrow \neg((\neg\alpha) \hat{e} \Gamma)$

(d) Med *en halvsyntaktisk KD;0-modell av første slag* forstår vi en halvsyntaktisk modell $<\upsilon,\Gamma,\varphi>$ av første slag som oppfyller oppfyller de følgende krav:
(i) $\alpha \hat{e} \Gamma \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Gamma \rightarrow \ \beta \hat{e} \Gamma$
(ii) PC* Inkl Γ
(iii) $\alpha \hat{e} \Gamma \rightarrow \neg((\neg\alpha) \hat{e} \Gamma)$

På samme måte som ved Teorem 3.1 kan man bevise:

Teorem 4.1 $K = UN/n\hat{e}N/(K;n)$ og $KD = UN/n\hat{e}N/(KD;n)$

Vi gir ikke noe detaljert bevis for denne sats siden beviset i hovedtrekkene blir som det vi tidligere ga for Teorem 3.1.

Teorem 4.2: Anta S er et av systemene K, KD, K4, KD4 eller et av systemene i rekken $<K;n>/n\hat{e}N/$ eller rekken $<KD;n>/n\hat{e}N/$. Da har vi:
(a) $S|- \alpha \rightarrow \ (AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(b) Er Δ en S-konsistent formelmengde finnes det en $M\hat{e}|S|$ slik at $(A\alpha)(\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \ \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(c) $(AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1) \rightarrow S|-\alpha$

Igjen gir vi ikke noe detaljert bevis for denne satsen siden bevisene for de enkelte punkter i hovedsak blir svært like bevisene for de tilsvarende punkter i Teorem 3.2.

Det følgende resultat er mer sentralt i vår sammenheng:

Teorem 4.3 (Hovedresultat II) Anta S er et av systemene K, KD, K4, KD4 eller et av systemene i rekken $<K;n>/n\hat{e}N/$ eller rekken $<KD;n>/n\hat{e}N/$. Da gjelder:
$S |- L\alpha \ v \ L\beta \rightarrow \ S |-L\alpha \ v \ S |- L\beta$

Dette teoremet kan utledes fra en langt mer generell sats:

Teorem 4.4 (Hovedresultat III). Anta X er en mengde med formler i L og at S er den minste mengden med formler som inneholder X og som er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen. Anta |S| er en ikke-tom klasse med halvsyntaktiske modeller av første slag som oppfyller de følgende betingelser:
(a) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow . \ S|- \alpha \rightarrow \ (AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(b) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow .(AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1) \rightarrow S|-\alpha)$
(c) Er $M,M'\hat{e}|S|$, er υ en vilkårlig verditilordning og er $\Gamma=\pi;2(M)\Omega\pi;2(M')$, så er $M''= <\upsilon,\Gamma,\varphi>$, der φ er valusjonsfunksjonen av første slag assosiert med $<\upsilon,\Gamma>$ også med i |S|.

Holder disse forutsetningene har vi at S har McKinsey-Tarski-egenskapen, med andre ord

© Morten Harboe Rognes

holder:

S |- Lα v Lβ → S |-Lα v S |- Lβ

Bevis: Anta at (1) ¬(S |-Lα) &¬(S |- Lβ). Fra dette og forutsetning (b) i satsen følger at det finnes M,M' der (2) M,M'ê|S| og (3) ¬(π;3(M)(Lα)=1) & ¬(π;3(M')(β)=1). Siden M,M' er halvsyntaktiske modeller av første slag følger fra (3) at det følgende holder:

(4) ¬(αêπ;2(M)) & ¬(βêπ;2(M')). Sett nå per definisjon (5) Γ=π;2(M)Ωπ;2(M'). Velg ut en vilkårlig verditilordning υ og sett (6) M" = <υ,Γ,φ> der φ er valuasjonsfunksjonen av første slag assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>. Fra (3), (5) og forutsetningen (c) i satsen kan man slutte at (7) M"ê|S|. Det følger også at M" er en halvsyntaktisk modell av første slag. Fra (4) og (5) følger åpenbart (8) ¬(αêΓ) & ¬(βêΓ). Siden M" er en halvsyntaktisk modell av første slag følger fra (8) at ¬(φ(Lα)=1) & ¬(φ(Lβ)=1). I lys av valuasjonsreglene for de setningslogiske konnektivene kan vi fra dette slutte at (9) ¬(φ(Lα v Lβ)=1). Fra (6), (7) og (9) følger at (EM)(Mê|S| & ¬(π;3(Lα vLβ)=1)). Dette og forutsetning (a) i satsen impliserer åpenbart at ¬(S |- Lα v Lβ). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED**.

Bevis for Teorem 4.3 I lys av Teorem 4.2 er det nok, for å vise at systemet S, der S er et av de systemene som er nevnt i Teorem 3.4, å vise at dersom M= <υ,Γ,φ> og M' =<υ',Γ',φ'> er to halvsyntaktiske S-modeller av første slag så vil også M' =<υ",Γ", φ" >, der υ" er en vilkårlig tilordning av sannehtsverdier til setningsbokstavene i L, Γ" = ΓΩΓ' og φ" er valuasjonsfunksjonen av første slag assosiert med modellstrukturen <υ", Γ">, være en halvsyntaktisk S-modell av første slag. Vi gjennomfører bare beviset i det tilfellet at systemet S er KD4. Bevisene i alle de andre tilfellene blir helt analoge. Anta derfor at M= <υ,Γ,φ> og M' =<υ',Γ',φ'> er to halvsyntaktiske KD4-modeller av første slag. Da har vi at Γ oppfyller de følgende krav:

(1) α, (α→β)êΓ → βêΓ
(2) KD4 |- α → αêΓ
(3) αêΓ → LαêΓ
(4) αêΓ → ¬((¬α)êΓ)

og at Γ' oppfyller nøyaktig de samme krav. La nå Γ"= ΓΩΓ' Det skulle da være temmelig opplagt at Γ" også oppfyller kravene (1) -(4). Er derfor υ" en vilkårlig tilordning av sannhetsverdier til setningsvariablene, og φ" valuasjonsfunksjonen av første slag assosiert med <υ",Γ"> er det åpenbart at M"= <υ",Γ", φ" > er en halvsyntaktisk KD4-modell av første slag.
Ved hjelp av Teorem 4.2 og Teorem 4.4 følger så at KD4 har McKinsey-Tarski egenskapen. **QED**.

§5 Bevis for at visse unormale modallogiske systemer har McKinsey-Tarski egenskapen.

Vi skal i dette avsnittet beskjeftige oss med de systemene vi drøftet i Rognes [3]. I første omgang skal vi undersøke nærmere systemene E2, E3, S2, S3, S6 og S7[3]. Det er nødvendig å minne om hvordan disse systemene er definert. I Rognes [3] definert vi mengden AxE2 som den mengden med formler som inneholder PC* samt alle instanser av de følgende aksiomskjemaer, nemlig Lα→ α og L(α→β)→(Lα→Lβ). AxE3 ble definert som AxE2 utvidet med alle instanser av skjemaet L(α→β) → L(Lα→Lβ). Operasjonen K ble så definert

3 De aksiomatiseringene av disse systemene som brukes her er hentet fra Kripke [2].

© Morten Harboe Rognes

på følgende vis: Anta X er en vilkårlig formelmengde i L. Da er K(X) den minste formelmengden Y i L som innholder X og der vi har Lγ→LδêY dersom δêY.

Nå er E2(E3) den minste formelmengden Y i L som inneholder K(AxE2) (K(AxE3)) og som er lukket under modus ponens. S2 (S3) er den minste formelmengen Y i L som inneholder K(AxE2) (K(AxE3)) samt alle formler av typen L(α→α) og som er lukket under modus ponens. Dermed er disse fire systemene avgrenset presist. Vi tar også med systemsekvensen <S2(n)>/nêN/. Systemet S2(n) er den minste formelmengden Y som inneholder K(AxE2) U Mg(L(n)(α→α): αêFm(L)) og som er lukket under modus ponens.

I forbindelse med de systemene som vi nå har introdusert er det, i likhet med hva som var tilfelle ved T og S4, hensiktsmessig å skille mellom halvsyntaktiske modeller av første og annet slag. Siden det er nødvendig å avgrense en rekke forskjellige klasser av modeller finner vi det formåltjenelig å innføre noen hjelpebegreper. Hjelpebegrepene gjør det mulig å avgrense de forskjellige modellklassene på en mer kompakt måte.

Definisjon 5.1 Vi kaller en formelmengde Δ for en E2-mengde om den inneholder K(AxE2) og er lukket under modus ponens. En formelmengde Δ kalles for en E3-mengde om den inneholder K(AxE3), er lukket under modus ponens og dessuten oppfyller kravet:

(Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) →. (α→β)êΔ → (Lα→Lβ)êΔ)

En E2(n)-mengde er en E2-mengde som innholder L(n)(α→α) for alle formler α. En S6, S7-mengde er en E2 (E3) mengde Δ som dessuten oppfyller kravet:

(Aα)(αêFm(L) → ¬(LαêΔ))

Man ser at dersom Δ og Δ' er to E2(E2(n),E3,S6,S7)- mengder er også snittet av Δ og Δ' en slik mengde.

Vi kan nå defininere de klassene av halvsyntaktiske modeller av første slag som er assosiert med systemene E2, E3, S2, S3, S6, S7 og <S2(n)>/nêN/ slik:

Definisjon 5.2 (a) Med en halvsyntaktisk E2 (E3) -modell av første slag forstås en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller sannhetskravet og der Γ enten er den tomme mengden eller en E2 (E3)-mengde. (b) Med en halvsyntaktisk S2 (S3)-modell av første slag forstås en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller sannhetskravet og der Γ er en E2 (E3)-mengde. (c) Med en halvsyntaktisk S2(n)-modell av første slag forstås en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller sannhetskravet og der Γ er en E2(n)-mengde (n>=0). (d) Med en halvsyntaktisk S6 (S7) -modell av første slag forstås en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av første slag som oppfyller sannhetskravet og der Γ enten er en S6(S7)-mengde.

Tilsvarende defineres modellklassene av annet slag som svarer til systemene E2, E3, S2, S3 og <S2(n)>/nêN/ slik:

Definisjon 5.3 (a) Med en halvsyntaktisk E2 (E3) -modell av annet slag forstås en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av annet slag der Γ enten er den tomme mengden eller en E2 (E3)-mengde. (b) Med en halvsyntaktisk S2 (S3)-modell av annet slag forstås en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av annet slag der Γ er en E2 (E3)-mengde. (c) Med en halvsyntaktisk S2(n)-modell av annet slag forstås en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av annet slag der Γ er en E2(n)-mengde. (d) Med en halvsyntaktisk S6 (S7) -modell av annet slag forstås en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av annet slag der Γ er en S6(S7)-mengde.

© Morten Harboe Rognes

Anta S er et av de systemene vi har avgrenset ovenfor. Da betegner, som tidligere, |S| mengden av alle de halvsyntaktisk S-modellene av første slag. ||S|| betegner mengden av alle de halvsyntaktiske S-modellene av annet slag.

På samme måte som ved systemene vi behandlet i §3 er det nå mulig å vise:

Teorem 5.1: Anta S er systemet E2, E3, S2, S3, S6, S7 eller et av systemene i rekken <S2(n)>/nêN/. Da har vi:

(a) $S|\text{-}\ \alpha \rightarrow\ (AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(b) $S|\text{-}\ \alpha \rightarrow\ (AM)(M\hat{e}||S|| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(c) $(AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1) \leftrightarrow (AM)(M\hat{e}||S|| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(d) Er Δ en S-konsistent formelmengde finnes det en Mê|S| slik at $(A\alpha)(\alpha\hat{e}\Delta \rightarrow\ \pi;3(M)(\alpha)=1)$
(e) $(AM)(M\hat{e}|S| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1) \rightarrow S|\text{-}\alpha$
(f) $(AM)(M\hat{e}||S|| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1) \rightarrow S|\text{-}\alpha$

Vi utelater beviset for denne setningen siden det er rutinemessig. Et detaljert bevis vil dessuten i hovedtrekkene ligne svært mye på det tilsvarende beviset for Teorem 3.2.

Ved hjelp av Teorem 5.1 kan vi så bevise det som er hovedresultatene i dette avsnittet. Det første er den følgende sats.

Teorem 5.2 (Hovedresultat IV) Anta S er systemet E2 eller systemet E3. Da gjelder:

$S \text{|-}\ L(\gamma\rightarrow\gamma)\rightarrow(L\alpha \vee L\beta). \rightarrow\ S \text{|-}L(\gamma\rightarrow\gamma)\rightarrow L\alpha \quad v \quad S \text{|-}\ L(\gamma\rightarrow\gamma)\rightarrow L\beta$

Bevis: Vi viser satsen i det tilfelle at S er systemet E2. Beviset når S er E3 blir nesten helt likt. Anta (1) $\neg(\ S \text{|-}L(\gamma\rightarrow\gamma)\rightarrow L\alpha)$ og (2) $\neg(\ S \text{|-}L(\gamma\rightarrow\gamma)\rightarrow L\beta)$. Det vil være tilstrekkelig å å vise at vi da har : $\neg(S \text{|-}\ L(\gamma\rightarrow\gamma)\rightarrow(L\alpha \vee L\beta))$. Fra (1) følger at $\{\neg(L(\gamma\rightarrow\gamma)\rightarrow L\alpha)\}$ er en S-konsistent mengde. Dette innebærer at $\{L(\gamma\rightarrow\gamma)\ \&\ \neg L\alpha\}$ er S-konsistent. Fra dette og Teorem 5.1e følger at det finnes en halvsyntaktisk S-modell M av første slag der (2) $M=\langle\upsilon,\Gamma,\varphi\rangle$ av slik at (3) $\varphi(L(\gamma\rightarrow\gamma))=1\ \&\ \neg(\varphi(L\alpha)=1)$. Fra dette følger (4) $\Gamma\neq\emptyset\ \&\ \neg(\alpha\hat{e}\Gamma)$. Tilsvarende følger fra (2) at $\{\neg(L(\gamma\rightarrow\gamma)\rightarrow L\beta)\}$ er en S-konsistent mengde. Dette innebærer at $\{L(\gamma\rightarrow\gamma)\ \&\ \neg L\beta\}$ er S-konsistent. Fra dette og Teorem 5.1e følger at det finnes en halvsyntaktisk S-modell M' av første slag der (5) $M'=\langle\upsilon',\Gamma',\varphi'\rangle$ slik at (6) $\varphi'(L(\gamma\rightarrow\gamma))=1\ \&\ \neg(\varphi'(L\beta)=1)$. Fra dette følger så: (7) $\Gamma'\neq\emptyset\ \&\ \neg(\beta\hat{e}\Gamma')$. Sett nå per definisjon: $\Gamma''=\Gamma\Omega\Gamma'$. Vi har at Γ og Γ' må være E2-mengder. Det er da lett å se at Γ'' også oppfyller alle de krav som stilles til en E2-mengde. Definer nå vilkårlig en verditilordning υ'' for utsagnsvariablene i L. Da vil $\langle\upsilon'',\Gamma''\rangle$ være en modellstruktur. La φ'' være den valuasjonsfunksjonen av annet slag som er assosiert med $\langle\upsilon'',\Gamma''\rangle$. Sett $M''=\langle\upsilon'',\Gamma'',\varphi''\rangle$. Siden Γ'' er en E2-mengde har vi at M'' er en halvsyntaktisk E2-modell av annet slag. Vi har derfor $M''\hat{e}||S||$. Fra (4) og (7) følger at (8) $\neg(\alpha\hat{e}\Gamma'')\ \&\ \neg(\beta\hat{e}\Gamma'')$. Siden Γ'' er en E2-mengde følger at (9) $(\gamma\rightarrow\gamma)\hat{e}\Gamma''$. Fra (8) og (9) følger videre siden $M''\hat{e}||S||$ at
$\varphi''(L(\gamma\rightarrow\gamma))=1\ \&\ \neg(\varphi(L\alpha \vee L\beta)=1)$. Men fra dette og Teorem 5.1b følger
$\neg(S \text{|-}\ L(\gamma\rightarrow\gamma) \rightarrow .\ L\alpha \vee L\beta)$. Dette viser at satsen holder. **QED**.

Teorem 5.3 (Hovedresultat V) Anta S er systemet S2, S3, S6, S7 eller et av systemene i rekken <S2(n)>/nêN/. Da gjelder:

$S \text{|-}\ L\alpha \vee L\beta \rightarrow\ S \text{|-}L\alpha \vee S \text{|-}\ L\beta$

Vi viser satsen i det tilfelle at S er systemet S2. Beviset når S er S3 eller et av systemene i

© Morten Harboe Rognes

sekvensen <S2(n)>/nêN/ blir nesten helt likt. Anta (1) ¬(S |-Lα) og (2) ¬(S |-Lβ). Det vil være tilstrekkelig å å vise at vi da har : ¬(S |- (Lα v Lβ)). Fra (1) følger at {¬(Lα)} er en S-konsistent mengde. Fra dette og Teorem 5.1e følger at det finnes en halvsyntaktisk S-modell M av første slag der (2) M= <υ,Γ, φ> av slik at (3) ¬(φ(Lα) = 1). Fra dette følger (4) ¬(αêΓ). Tilsvarende følger fra (2) at {¬(Lβ)} er en S-konsistent mengde. Dette innebærer at {¬Lβ} er S-konsistent. Fra dette og Teorem 5.1e følger at det finnes en halvsyntaktisk S-modell M' av første slag der (5) M'= <υ',Γ', φ'> slik at (6) ¬(φ'(Lβ) = 1). Fra dette følger (7) ¬(βêΓ'). Sett nå per definisjon Γ" = ΓΩΓ'. Vi har at Γ og Γ' må være E2-mengder. Det er da lett å se at Γ" også oppfyller alle de krav som stilles til en E2-mengde. Definer nå vilkårlig en verdi-tilordning υ" for utsagnsvariablene i L. Da vil <υ",Γ"> være en modellstruktur. La φ" være den valuasjonsfunksjonen av annet slag som er assosiert med <υ",Γ">. Sett M" = <υ", Γ",φ" >. Siden Γ" er en E2-mengde har vi at M" er en halvsyntaktisk S2-modell av annet slag. Vi har derfor M"ê||S||. Fra (4) og (7) følger at (8) ¬(αêΓ") & ¬(βêΓ"). Fra (8) følger videre siden M"ê||S|| at ¬(φ(LαvLβ)=1). Men fra dette og Teorem 5.1b følger ¬(S |- Lα v Lβ). Dette viser at satsen holder. **QED**.

Det er også mulig å bevise et generelt teorem av samme type som Teorem 4.4 for systemer som inneholder Lα→α enten som aksiom eller som en bevisbar formel. Man har:

Teorem 5.4 Anta X er en mengde med formler i L og at S er den minste mengden med formler som inneholder X og som er lukket under modus ponens og og eventuelle andre slutningsregler. Anta |S| og ||S|| er ikke-tomme klasser med halvsyntaktiske modeller av henholdsvis første slag og annet slag som oppfyller de følgende betingelser:

(a) (Aα)(αêFm(L) →. S|- α ↔ (AM)(Mê|S| → π;3(M)(α)=1)

(b) (AM)(Mê|S| → π;3(M)(α)=1) ↔ (AM)(Mê||S|| → π;3(M)(α)=1)

(c) Er M,M'ê|S|, er υ en vilkårlig verditilordning og er Γ=π;2(M)Ωπ;2(M'), så er M"= <υ,Γ,φ>, der φ er valusjonsfunksjonen av annet slag assosiert med <υ,Γ> også med i ||S||.

Holder disse forutsetningene har vi at S har McKinsey-Tarski-egenskapen, med andre ord holder:

S |- Lα v Lβ → S |-Lα v S |- Lβ

Bevis: Anta (1) ¬(S |-Lα) og (2) ¬(S |-Lβ). Det vil være tilstrekkelig å å vise at vi da har : ¬(S |- (Lα v Lβ)). Fra (1) følger at {¬(Lα)} er en S-konsistent mengde. Fra dette og forutsetning (a) i satsen følger at det finnes en halvsyntaktisk S-modell M av første slag der (2) M= <υ,Γ, φ> av slik at (3) ¬(φ(Lα) = 1). Fra dette følger (4) ¬(αêΓ). Tilsvarende følger fra (2) at {¬(Lβ)} er en S-konsistent mengde. Dette innebærer at {¬Lβ} er S-konsistent. Fra dette og forutsetning a følger at det finnes en halvsyntaktisk S-modell M' av første slag der (5) M'= <υ',Γ', φ'> slik at (6) ¬(φ'(Lβ) = 1). Fra dette følger (7) ¬(βêΓ'). Sett nå per definisjon Γ" = ΓΩΓ'. Definer nå vilkårlig en verdi-tilordning υ" for utsagnsvariablene i L. Da vil <υ",Γ"> være en modellstruktur. La φ" være den valuasjonsfunksjonen av annet slag som er assosiert med <υ",Γ">. Sett M" = <υ", Γ",φ" >. Vi har da M"ê||S|| ved hjelp av forutsetning (c). Fra (4) og (7) følger at (8) ¬(αêΓ") & ¬(βêΓ"). Fra (8) følger videre siden (9) M"ê||S|| at
(10) ¬(φ(LαvLβ)=1). Nå har vi imidlertid fra (a) og (b) at:

(Aα)(αêFm(L) →. S|- α ↔ (AM)(Mê||S|| → π;3(M)(α)=1)

Men fra dette, et forhold at M"ê||S|| og (10) følger: ¬(S|- Lα v Lβ). Dette viser at satsen holder. **QED.**

© Morten Harboe Rognes

§6 Noen avsluttende bemerkninger

Fjerner man aksiomskjemaet Lα→α helt fra systemene E2,E3, S2,S3, S6, S7 og de diverse S2(n) får man noen nye kalkyler. man kan betegne disse: E2*,E3*, S2*,S3*, S6*, S7* og S2*(n). Utvides hver og en av disse kalkylene med aksiomskjemaet (D) Lα→¬L¬α kan de tilsvarende systemer betegnes E2*+D,E3*+D, S2*+D,S3*+D, S6*+D, S7*+D og S2*(n)+D. For alle disse systemene er det meget lett å definere korresponderende klasser av halvsyntaktiske modeller av første slag. Er S et av disse systemene betegner |S| mengden av alle de halvsyntaktiske modellene av første slag som korresponderer til S. Det er da i lys av det vi har vist ovenfor en ren rutinemessig sak å vise at man har:

(i) (Aα)(αêFm(L) →. S|- α → (AM)(Mê|S| → π;3(M)(α)=1) og

(ii) Er M,M'ê|S|, er υ en vilkårlig verditilordning og er Γ=π;2(M)Ωπ;2(M'), så er M''= <υ,Γ,φ>, der φ er valusjonsfunksjonen av første slag assosiert med <υ,Γ> også med i |S|.

Ved hjelp av Teorem 4.4 i §4 kan man så konkludere med at alle disse systemene har McKinsey-Tarski egenskapen.

Det virker berettiget, i lys av de resultatene som har blitt fremlagt i dette skrift, å si at halvsyntaktiske modeller er av interesse ved studiet av setningslogiske modalsystemer. Trolig kan nesten alle av de resulatene vi har presentert også oppnås om man bruker Kripke-modeller av en eller annen art. Men siden Kripke-modellene er en type strukturer som er en tanke mer kompliserte enn de halvsyntaktiske modellene, blir bevisene for de gyldighets og kompletthets-resultatene man trenger noe lengere. Det virker derfor som om den bevismetoden vi har brukt ovenfor er en av de mest direkte og effektive metodene man kan tenke seg om man ønsker å vise at et system har McKinsey-Tarski egenskapen.

© Morten Harboe Rognes

Referanser

Kripke [1] Kripke, S.A., 1963, "Semantical analysis of modal logic I, normal propositional calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*", Vol 9, pp. 67 - 96

Kripke [2] Kripke, S.A., 1963, "Semantical analysis of modal logic II, non-normal propositional calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*", Vol 9, pp. 67 - 96

McKinsey og Tarski [1] McKinsey,J.C.C. og A.Tarski,1948, "Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting", *Journal of Symbolic Logic*, Vol 19, pp. 1- 15

Rognes [1] Rognes, M.H., 1971, *Halvsyntaktiske modeller og normale modale setningslogiske systemer*, Upublisert manuskript.

Rognes [2] Rognes, M.H., 1971, *Halvsyntaktiske modeller og deontisk logikk,* Upublisert manuskript.

Rognes [3] Rognes, M.H., 1971, *Halvsyntaktiske modeller og unormale setningslogiske modalsystemer,* Upublisert manuskript.

© Morten Harboe Rognes